ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

PHẠM ANH HUY

SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

PHẠM ANH HUY

SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

Thái Nguyên - 2020

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Trịnh Thanh Hải. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K12 trường Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K12 đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập và làm luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2020

Tác giả

Phạm Anh Huy

Mục lục

Mở đầu

Bài toán chứng minh bất đẳng thức là một bài toán khó, thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh, cấp quốc gia và quốc tế. Chính vì vậy bài toán bất đẳng thức luôn dành được sự quan tâm rất lớn từ các bạn học sinh, các thầy giáo, cô giáo và các nhà toán học. Một trong các phương pháp có hiệu quả để giải một số bài toán chứng minh bất đẳng thức là sử dụng các tính chất của hình học.

Ý tưởng của "Phương pháp sử dụng tính chất hình học để chứng minh bất đẳng thức" xuất phát từ các tính chất quen thuộc trong hình học, ta vận dụng đề để đưa ra lời giải cho bài toán chứng minh bất đẳng thức, mà trong đó có nhiều bài toán bất đẳng thức khó dành cho học sinh khá, giỏi.

Xuất phát từ thực tế trên và với mục đích tích lũy thêm các kiến thức về cách chứng minh các bất đẳng thức và vận dụng một số tính chất hình học vào giải một số bài toán bất đẳng thức trong các đề thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế làm tư liệu cho công việc giảng dạy của bản thân, chúng em đã lựa chọn hướng nghiên cứu vận dụng một số tính chất hình học vào chứng minh, đưa ra lời giải cho một số bài toán bất đẳng thức dành cho học sinh khá, giỏi.

Luận văn tập trung vào hoàn thành các nhiệm vụ chính sau:

- Tìm hiểu về các tính chất hình học thường được vận dụng để đưa ra lời giải cho các bài toán chứng minh bất đẳng thức.

- Ý tưởng toán học của việc lựa chọn, vận dụng một số tính chất hình học trong việc tìm lời giải cho bài toán chứng minh bất đẳng thức.

- Sưu tầm một bài toán, đề thi về bài toán bất đẳng thức dành cho học sinh giỏi.

- Đưa ra lời giải bằng cách vận dụng các tính chất hình học cho một số bài toán chứng minh bất đẳng thức dành cho học sinh giỏi. Ngoài ra luận văn cũng đưa ra các cách giải khác nhau của cùng một bài toán bất đẳng thức và so sánh những phương pháp giải đó với lời giải dựa vào việc vận dụng các tính chất hình học để có những nhận xét thú vị.

Cấu trúc của luận văn gồm có hai chương và phần mở đầu, kết luận.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này tác giả trình bày một vài bất đẳng thức quen thuộc trong chương trình toán trung học phổ thông và một số phương pháp giải bài toán bất đẳng thức trong pham vi trung học phổ thông.

Chương 2. Vận dụng các tính chất hình học để chứng minh bất đẳng thức. Chương này trình bày về ý tưởng của việc vận dụng các tính chất hình học để chứng minh bất đẳng thức và một số bài toán chứng minh bất đẳng thức dựa trên các tính chất hình học. Tác giả đã minh họa cách vận dụng kiến thức hình học vào các bài toán chứng mình bất đẳng thức bằng các ví dụ cụ thể, đưa ra được bất đẳng thức Finsler-Hadwiger, phép thế Conway ... áp dụng được vào chứng minh một số bất đẳng thức đại số.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Một vài bất đẳng thức quen thuộc thường gặp trong chương trình phổ thông

1.1.1 Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

Tính chất		**Tên gọi**
Điều kiện	**Nội dung**	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

1.1.2 Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Điều kiện	Nội dung
	$\|x\| \geq 0,\ \|x\| \geq x,\ \|x\| \geq -x$
$a > 0$	$\|x\| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$\|x\| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a$
	$\|a\| - \|b\| \leq \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

1.1.3 Bất đẳng thức $AM - GM$ (bất đẳng thức Cauchy)

Định lý 1.1. *Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \forall a, b \geq 0. \tag{1.1}$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ *xảy ra khi và chỉ khi* $a = b$.

Mở rộng: Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm thì

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Hệ quả 1.1. *Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.*

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad a > 0.$$

Hệ quả 1.2. *Nếu* x, y *cùng dương và có tổng không đổi thì tích* xy *lớn nhất khi và chỉ khi* $x = y$.

Hệ quả 1.3. *Nếu* x, y *cùng dương và có tích không đổi thì tổng* $x + y$ *nhỏ nhất khi và chỉ khi* $x = y$.

1.1.4 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (bất đẳng thức Bunhiacopski)

Định lý 1.2. *Với các số thực* a, b, c, d *tùy ý ta luôn có*

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) \geq (ac + bd)^2.$$

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}
\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) &\geq (ac+bd)^2 \\
\Leftrightarrow (ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2 &\geq (ac)^2+2abcd+(bd)^2 \\
\Leftrightarrow (ad)^2-2adbc+(bc)^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow (ad-bc)^2 &\geq 0 \quad \text{(luôn đúng).}
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ad = bc$ hay $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$. □

Mở rộng: Với hai bộ số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ta có

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \geq (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử phải bằng 0.

Chứng minh. Đặt $a = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$, $b = \sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$.

- Nếu $a = 0$ hay $b = 0$: Bất đẳng thức luôn đúng.
- Nếu $a, b > 0$:

Đặt $\alpha_i = \dfrac{a_i}{a}, \beta_i = \dfrac{b_i}{b}, (i = 1, 2, \ldots, n)$, thế thì

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2 = \beta_1^2+\beta_2^2+...+\beta_n^2.$$

Mặt khác:

$$|\alpha_i\beta_i| \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right),$$

suy ra

$$\begin{aligned}
|\alpha_1\beta_1|+|\alpha_2\beta_2|+\ldots+|\alpha_n\beta_n| &\leq \frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_n^2) \leq 1 \\
\Rightarrow |a_1b_1|+|a_2b_2|+\ldots+|a_nb_n| &\leq a.b.
\end{aligned}$$

Lại có:

$$|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| \leq |a_1b_1|+|a_2b_2|+...+|a_nb_n|,$$

suy ra

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$$